***Лекция 9***

**Потенциальное силовое поле.**

**Определение и свойства потенциального силового поля.**

***Силовым полем*** называется трехмерное пространство, в каждой точке которого задана функция силы **F**(**r**;t). Если время t отсутствует явно, то поле ***стационарное***.

Рассмотрим стационарное силовое поле, заданное в декартовых координатах x, y, z функциями:

Fx(x,y,z); Fy(x,y,z); Fz(x,y,z) (\*)

Как было показано, для вычисления конечной работы силы силового поля, необходимо знать траекторию точки. Среди силовых полей существует класс ***потенциальных силовых полей***, для которых конечная работа силы определяется только начальным и конечным положением точки и не зависит от траектории.

Силовое поле (38) называется ***потенциальным***, если существует такая функция ***потенциальной энергии*** П(x,y,z), что

Fx= - ∂П/∂х Fy= - ∂П/∂y Fz= - ∂П/∂z

Пусть задано поле (\*). Как проверить, является ли оно потенциальным? Мы считаем, что потенциальная энергия П является непрерывной, дважды дифференцируемой функцией координат. Тогда можно воспользоваться свойством: порядок взятия смешанной производной не влияет на результат :

, , ,

Отсюда ***критерии потенциальности cилового поля***

***Свойства работы потенциальных сил.***

1. Элементарная работа потенциальной силы равна минус дифференциалу потенциальной энергии. Действительно

d’A=**F•**d**r=**Fxdx+ Fydy+ Fzdz= ̶ (

Отсюда вытекают следующие свойства.

1. Конечная работа потенциальной силы зависит только от начального и конечного положения точки

А12=

1. Работа по замкнутому кругу равна нулю:

П1=П2, поэтому Ао=0

**Вычисление потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии.**

Поверхность на которой П сохраняет значение называется ***эквипотенциальной***:

П (x,y,z) =С1= const

Выясним направление F по отношению к потенциальной поверхности. Пусть точка перемещается по эквипотенциальной поверхности П=С1 . По свойству работы потенциальная сила F не совершает работы:

d’A = **F •** d**r** = 0

Поскольку d**r** направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности П = С1, то сила направлена перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

С другой стороны

**dr**

**F**

П=0

M(x,y,z)

Mo

**F**=

Значит, сила направлена в сторону убывания П.

По свойствам дифференцирования обе функции П(х,у,z) и П(х,у,z) + С, где С- произвольная аддитивная постоянная, определяют одно и тоже силовое поле**.** Говорят, что потенциальная энергия определена с ***точностью до постоянной****.*

Выберем нулевой уровень потенциальной энергии. Переместим точку из произвольного положения М(х,у,z) пространства в любую точку нулевого уровня и сосчитаем работу силы:

AMМo= П(х,у,z)

Отсюда ***правило вычисления функций потенциальной энергии***:

*Функция П(х,у,z) вычисляется как работа потенциальной силы*

*на перемещение из произвольной точки М(х,у,z) на нулевой уровень****.***

**r1**

**r2**

**Δr**

**F**

x

y

z

h

**Примеры:**

1. *Постоянная сила* **F = const**: А12= **F** **•** 1∫2d**r** = **F** **•** (**r2-r1)= F** **•Δr**
2. *Cила тяжести*. Это частный пример постоянной силы:

Поле однородно, если

**F** = m**g**, **g** = **const**

Направим ось вертикально вверх, тогда

Fx=Fy=0 Fz = - mg

Все поверхности z = const эквипотенциальны. Поэтому

А12 = Fz (z1-z2) = ± mgh

Работа положительна, если точка опускается.

1. *Прямая линейная пружина*:

с

**Fв**

m**g**

*l0*

x

y

x

0

Естественная длина недеформированной пружины *l0*. При изменении длины на Δ**=** *l -l0* ,называемом деформацией пружины, возникает упругая сила **Fв**. Она всегда стремится восстановить недеформированное состояние пружины, поэтому она называется ***восстанавливающей силой***.

Пружина ***линейна***, если сила **Fв** линейно зависит от деформации:

Fв=сΔ

Коэффициент с (н/м) называется жесткостью пружины. Если начало оси х выбрать в положении, где Δ=0, то

Fвх= - сх

Элементарная работа силы **Fв**

d’A= Fвx dx = - cx dx

Конечная работа силы **Fв**

A12= - c

Квадраты координат можно заменить их модулями- деформациями:

A12=

1. *Спиральная линейная пружина*:

При закручивании пружины на угол φ, называемый деформацией пружины Δ’, возникает упругий *восстанавливающий момент* **Мв**. Пружина *линейна,* если

с’

φ = Δ’

Δ’= 0

Мвz= - с’φ

Коэффициент с’ (нм) называется жесткостью пружины.

Конечная работа момента **Мв**

A12= - c’

A12=

Система называется ***консервативной***, если все действующие на неё силы потенциальны.

Теорема об изменении кинетической энергии для консервативной системы в интегральной форме:

Т2-Т1=А12=П1-П2 или Т2 +П2=Т1 +П1

***Полной механической энергией*** системы называется сумма её кинетической и потенциальной энергий:

с

**Fв**

m**g**

*l0*

x

y

x

0

Е=Т+П

Как видим, полная механическая энергия консервативной системы сохраняется

E = const

Предположим, что кроме потенциальных сил, на систему действуют не потенциальные силы, тогда:

dT=d’Aпот+ d’Aне пот=-dП+ d’Aне пот

Поделив на dt, найдем, что ***скорость изменения полной механической энергии равна мощности непотенциальных сил****.*

dE/dt=Nне пот

Например, при наличии ***силы вязкого сопротивления***

**F**сопр= - β**V** β = Const

полная механическая энергия убывает со скоростью

dE / dt = - β**V•V** = - βV2

**Обобщенные силы.**

**Статический принцип возможных перемещений для консервативной системы.**

Рассмотрим консервативную несвободную систему с потенциальной энергией П (x,y,z), и обобщенными координатами q1....q*l*. Найдем обобщенные силы системы по определению

**Пример**: эллиптический маятник

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение x=0, φ=0 и вычислим работу при возвращении системы в начало координат

П = m2gl (1- Cos φ)

П не зависит от х, значит Qx=0

Qφ = - ∂П/∂φ = - m2gl Sin φ

***Статический принцип возможных перемещений***:

δA=∑Qiδqi=0

Поскольку обобщенные возможные перемещения δqi независимы, то принцип можно прочитать следующим образом:

*В положении равновесия все обобщенные силы обращаются в ноль.*

Qi=0 (i=1,2,...,*l*)

Это значит, что

*В положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет экстремум*

∂П/∂qi=0 (i=1,2,...,*l*)

Следовательно, нахождение положений равновесия консервативной системы сводится к нахождению экстремумов функции П.

**Уравнение Лагранжа для консервативных систем.**

**Циклические координаты и интегралы.**

Рассмотрим консервативную несвободную систему с *l* степенями свободы. Потенциальная энергия П(q1...q*l*) определяет обобщенные силы

Qi = - ∂П/∂qi (i=1,2,...,*l*)

Уравнения Лагранжа приобретают вид

(i=1,2,..,*l*)

Здесь учтено, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей

(i=1,2,..,*l*)

Запишем уравнения Лагранжа через ***функцию Лагранжа***

L= T-П

(i=1,2,..,*l*)

Координата qσ называется ***циклической***, если от нее не зависит функция Лагранжа

∂L/∂qσ=0

Уравнение Лагранжа с номером σ приобретает вид

и имеет ***циклический интеграл***

Часто этот интеграл описывает случай сохранения количества движения или кинетического момента.

**Пример**: эллиптический маятник

П и Т не зависят от х, значит х- циклическая координата, и существует интеграл

Мы уже отмечали, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси х.